

1. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, lx + my + nz = p$ ($a > 0, l, m, n$ は定数) のとき, $ny \neq mz$ を満たす点 (x, y, z) において $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ を求めよ.

2. 条件

$$\varphi(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$$

のもとで, 関数

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3$$

の最大値と最小値を求めよ.

3. 次の積分の値を計算せよ.

$$(1) \quad \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, a > 0, b > 0 \right\}$$

$$(2) \quad \iint_W \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad W = \{x^2 > y^2, 0 < x < 1\}$$

4. 3次元極座標 (r, θ, φ) を用いて表した球面 $r = a$ ($a > 0$) と円錐面 $\theta = \alpha, r > 0$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

5. 関数 $\frac{\sin x}{x}$ のラプラス変換

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\sin x}{x} dx \quad (s \geq 0)$$

の導関数 $L'(s)$ ($s > 0$) を求めよ. 次に, この結果を用いて

$$L(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s \quad (s \geq 0)$$

を示せ. 特に, $L(0)$ の値を求めよ.