

微積分B 試験問題

平成18年2月8日(水)

1. $x = u^2 - v^2, y = uv, z = u^2 + v^2$ のとき, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ. ただし, $(u, v) \neq (0, 0)$ とする.

2. 条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで, 関数

$$f(x, y, z) = xy + \frac{z}{2}$$

の最大値と最小値を求めよ.

3. 次の積分の値を計算せよ.

$$(1) \iint_D \sqrt{x} \, dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq x\}$$

$$(2) \iiint_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} \quad \left(\alpha < \frac{3}{2}\right), \quad W = \{0 < x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$$

4. 3次元極座標 (r, θ, φ) を用いて表した球面 $r = a$ ($a > 0$) と円錐面 $\theta = \alpha, r > 0$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

5. (1) 広義積分

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx$$

を求めよ. (ヒント. 関数 $F(\alpha)$ がみたす微分方程式を作り, それを解いて $F(\alpha)$ の形を決める. その際, 積分定数が出てくるが, それを決定するために初期条件を与える関数値 $F(0)$ を前もって求めておく.)

6. 次の方程式で与えられる曲線の概形を描き, 原点以外の任意の点における接線の方程式を求めよ.

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$