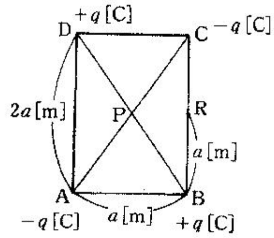
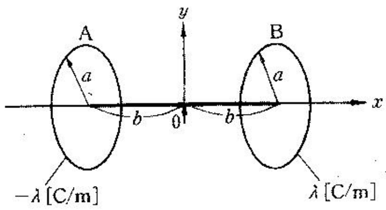
1．図のような長方形ABCDにおいて，頂点AとCに $q(<0)$ [C]，BとDに $q(>0)$ [C]の点電荷を置くとき,次の電界を求めよ．

(a)　長方形の中心P

(b)　BCの中点R



2．一様な線電荷密度 $\pm\lambda$ [C/m]の電荷が，半径 a [m]の2つの円周上に分布している．このとき，両円の中心軸上任意点Pの電位Vを求めよ．ただし，2つの円の中心は，図のようにx軸上にあり，それぞれの中心の点の座標は$(-b, 0, 0)$, $(b, 0, 0)$である．



3．無限長同軸円筒の導体がある．内導体の半径 a [m]，外導体の内側半径 b [m]，外側半径 c [m]とする．次の各場合の両導体間の電界の大きさと電位差および外導体外部の電界の大きさを求めよ．

(a) 内導体だけに,単位長あたり+q の電荷を与えた場合

(b) 内導体に単位長あたり+q，外導体に－q の電荷が与えられた場合

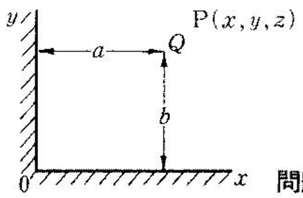
4．半径 a [m]の導体球を内半径 b [m]，外半径 c [m]の導体球殻でつつんだ同心球がある．内・外の導体球をそれぞれ，1，2とするとき，電位係数および容量，誘導係数を求めよ．

5．面積 S [m^2]の金属板を b [m]隔てて平行に置いてある．この金属板間に b/3 [m]の厚さの金属板を平行に，かつ両板間の中央に置くとき静電容量は最初の何倍になるか。ただし，b は S に比してきわめて小さいものとする．

6．半径 a [m]の2つの無限に長い直線導体ABがその中心間の間隔 d [m]を隔てて平行に置かれているとき，単位長あたりの導体間の静電容量[F/m]を求めよ．

7．無限に広い平面導体から d [m]の距離に，半径 a [m]の小球が Q [C]に帯電している．小球と導体板の間の静電容量はいくらか．ただし，$d>>a$ とし，平面導体の電位は零である．

8．無限に広い平面導体が直角に曲げて接地されている．
点電荷 Q [C]を図のようにおくときの点Pの電位を求めよ．



問題

9．接地されている2枚の無限平面導体板A，Bの間に，両板からのそれぞれの距離 a，b [m]の点に点電荷 Q [C]を置く場合の点電荷に働く力を求めよ．

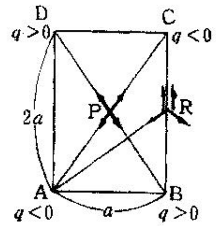
10.　1辺 r [m]の正三角形の各頂点に半径 a [m] $(a<<r)$の導体球が置かれており，いずれも Q [C]の電荷が与えてある．この3個の導体球を順次瞬間的に接地するとき，各球に残る電荷量を求めよ．

1. (a) 点Pの電界は，点Pに1 [C] を置いてクローン力を考えればよい．点PではAの電荷による電界とCによる電界およびBによる電界とDによる電界が互いに打ち消し合い，点Pの電界は零となる．

(b) 次に，点Rに1 [C] を置いたときの，Bによる電界とCによる電界は，同方向で大きさも等しい．また，DおよびAによる電界はCB方向の分力だけが残り，次のようにして電界の大きさが求まる．

$$E_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\times 2 - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2}\times\frac{a}{\sqrt{2a^2}}\times 2$$

$$= \frac{(4-\sqrt{2})q}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad [\mathrm{V/m}]$$



2. x 軸上任意点Pの座標を $(x,\ 0,\ 0)$ と表わすと，

i ）Aの微小線素 dl による点電荷 $-\lambda dl$ による点Pの電位 dV_A は

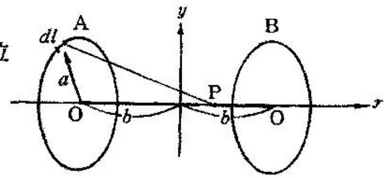
$$dV_A = \frac{-\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0\{(x+b)^2+a^2\}^{1/2}}$$

$$\therefore\quad V_A = \int_0^{2\pi a}\frac{-\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0\{(x+b)^2+a^2\}^{1/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\{(x+b)^2+a^2\}^{1/2}}\int_0^{2\pi a}dl$$

$$= -\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0\{(x+b)^2+a^2\}^{1/2}}$$

ii ）Bの微小線素 dl 部の点電荷による点Pの電位

$$dV_B = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0\{(x-b)^2+a^2\}^{1/2}}$$



$$\therefore\quad V_B = \int_0^{2\pi a}\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0\{(x-b)^2+a^2\}^{1/2}} = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0\{(x-b)^2+a^2\}^{1/2}}$$

任意点Pの電位 V_P は，重ねの理によって V_A，V_B の和として表わされ，

$$V = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\{(x-b)^2+a^2\}^{1/2}} - \frac{1}{\{(x+b)^2+a^2\}^{1/2}}\right\}$$

3. (a) 内導体に単位長あたり $+q$ [C] の電荷を与えると，静電誘導により，外導体の内側に単位長あたり $-q$，外側に $+q$ [C] の電荷が生じる．しかし，内外導体内で内導体中心から半径 x [m] の電界は，内導体の電荷 $+q$ [C] だけを考えればよい．ゆえに，

$$E = q/(2\pi\varepsilon_0 x) \qquad [\mathrm{V/m}]$$

両導体間の電位差は

$$V_{ab} = -\int_b^a E dx = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{b}{a} \qquad [\mathrm{V}]$$

外導体外部に単位長あたりの閉曲面を考えても，電荷の総和は，$+q-q+q=+q$ [C] であって，電界は内外導体間と同じ形で求まる．

(b) この場合，+，−の電荷は互いに吸引し合い，$-q$ [C] の電荷は，外導体内側に集まり，外側には電荷が存在しない．したがって，両導体間の電界，電位差は(i)の場合と全く同じである．

また，外導体外側の電界は，電気力線が+，−の両電荷で終端しており，電気力線がないので，電界は存在しない．

4. 導体1，2にそれぞれ Q_1，Q_2 を与えたときの電位 V_1，V_2 は

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c},\quad V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} \qquad (1)$$

電位係数の定義式，

$V_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2$，$V_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2$ と比較して，電位係数は

$$\left.\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\quad P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ P_{22} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{aligned}\right\}$$

次に，式(1)を Q_1，Q_2 について解くと，

$$Q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}(V_1 - V_2),\quad Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{b-a}\{-V_1 + (ab+bc-ca)V_2\}$$

定義式，

$Q_1 = q_{11}V_1 + q_{12}V_2$，$Q_2 = q_{21}V_1 + q_{22}V_2$ と比較して，静電容量，誘導係数は

$$q_{11} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a},\quad q_{12} = q_{21} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a},\quad q_{22} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}+c\right)$$

5. はじめの静電容量は，$C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{b} \cdots (1)$，$b/3$ の厚さの金属板を中央に入れたときは，$b/3$ の間隔のコンデンサを直列に接続したと考えればよい．このときの静電容量は，

$$C_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{\frac{b}{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{b} \cdots (2)$$

式(1)，(2)から，$C_1 = \dfrac{3}{2}C_0$，つまり，はじめの容量の 1.5 倍となる．

6. 導線単位長あたり，A に $+q$ [C/m]，B に $-q$ [C/m] の電荷を与えたと仮定すると，両導体の中心を結ぶ直線上で A から x [m] の点の A による電界は $q/2\pi\varepsilon_0 x$，B による電界は $q/2\pi\varepsilon_0(d-x)$ となり，電界の向きはともに同一方向であるから，合成電界は

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{(d-x)}\right\}$$

AB 間の電位差は

$$V = -\int_{d-a}^{a} E dx = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\int_{a}^{d-a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx$$

$$= \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\log\frac{d-a}{a}$$

静電容量：$C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\log\dfrac{d-a}{a}} \fallingdotseq \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\log\dfrac{d}{a}}$ [F/m]

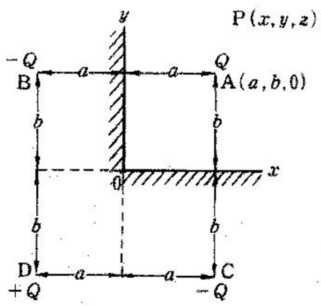
7. 小球の電荷 Q による影像電荷 $-Q$ を考えると，小球の電位は

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2d}\right)$$

平面導体の電位は零であるから，この導体と小球との間の電位差は上式で与えられる．

$\therefore$ 静電容量 $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2d}}$

8. 影像電荷を図のように定める．$x > 0$，$y > 0$ の領域の点 P の電位は A，B，C，D 各点の電荷によって生じる電位の和として求められる．



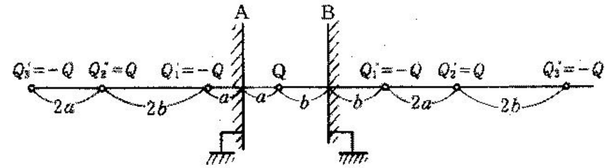
$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathrm{AP}} - \frac{1}{\mathrm{BP}} - \frac{1}{\mathrm{CP}} + \frac{1}{\mathrm{DP}}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right) \quad [\mathrm{V}]$$

9. A，B は接地されているから，この電位が零となるように影像電荷を置く必要がある．いま，A の電位を零とするために Q の A に対する影像電荷 $-Q = Q_1'$ を置き，同じく B の電位を零にするための影像電荷 $-Q = Q_1''$ を置くと，A の電位が Q_1'' のため，また，B の電位が Q_1' のために零でなくなってしまう．そこで，Q_1'，Q_1'' の B，A に関する影像 Q_2'，Q_2'' を置くとさらにこれらの A，B による影像 Q_3'，Q_3'' を置く必要が生じてくる．結局，この無限個の影像電荷を考えることによって，等価な電界を実現できる．

A 側の影像電荷と点電荷間の引力：

$$F_1 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(2a)^2} - \frac{1}{(2a+2b)^2} + \frac{1}{(4a+2b)^2} - \cdots\right\}$$



B 側の影像電荷と点電荷間の引力：

$$F_2 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(2b)^2} - \frac{1}{(2a+2b)^2} + \frac{1}{(2a+4b)^2} - \cdots\right\}$$

$\therefore$ A 方向への引力

$$F = F_1 - F_2$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(2a)^2} - \frac{1}{(2b)^2} + \frac{1}{(4a+2b)^2} - \frac{1}{(2a+4b)^2} + \cdots\right\} \quad [\mathrm{N}]$$

10. 各導体の電荷を Q_1，Q_2，Q_3，電位を V_1，V_2，V_3 とすると，

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{r} + \frac{Q_3}{r}\right) \quad (1)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{a} + \frac{Q_3}{r}\right) \quad (2)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{r} + \frac{Q_3}{a}\right) \quad (3)$$

(i) 第 1 導体球を接地した場合式(1)で，$Q_2 = Q_3 = Q$，$V_1 = 0$ として，

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q}{r} + \frac{Q}{r}\right) \quad \therefore \quad Q_1 = -\frac{2a}{r}Q \quad [\mathrm{C}]$$

(ii) 次に第 2 球を接地したときは，式(2)で $Q_1 = -2aQ/r$，$Q_3 = Q$，$V_2 = 0$ とすれば，

$$Q_2 = -\frac{a(r-2a)}{r^2}Q \quad [\mathrm{C}]$$

(iii) 第 3 球を接地するときは，式(3)において，$Q_1 = -2aQ/r$，$Q_2 = -a(r-2a)Q/r^2$，$V_3 = 0$ として，

$$Q_3 = \frac{a^2(3r-2a)}{r^3}Q \quad [\mathrm{C}]$$