線形代数B試験（2月10日, 三苫）

$\boxed{1}$

(1) 行列 A を $n\times n$-行列とし、複素 n-次元空間 C^n から C^n への線形変換と見る。このとき或る C^n の基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が存在して

$$A[v_1 v_2 \cdots v_n] = [v_1 v_2 \cdots v_n]D,\ D \quad \text{は対角行列}$$

となった。今 C^n の標準基底を $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ とするとき、

$$[e_1 e_2 \cdots e_n] = [v_1 v_2 \cdots v_n]P$$

であると言う。A を正則行列で対角化せよ。

(2) 行列 A の固有値 λ について、その一般固有空間が $Ker(A-\lambda I)^3$ に一致しているという。$W_i = Ker(A-\lambda I)^i$ とするとき、W_3/W_2 の基底は u_1 であり、W_2/W_1 の基底は $(A-\lambda I)u_1, u_2$ であり、W_1 の基底は $(A-\lambda I)^2 u_1, (A-\lambda I)u_2, u_3$ であるという。$Ker(A-\lambda I)^3$ の基底を選んで、A の表現行列（ジョルダン形）を求めよ。

$\boxed{2}$

(1) 今，行列Aを

$$\begin{bmatrix} -4 & -8 & 3 & -2 \\ 9 & 15 & -5 & 4 \\ 12 & 19 & -6 & 5 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。この時，

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の行列を A とせよ。.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(1) $B = A^t A$ を求めよ。.

(2) 行列 B を対角化せよ。

(3) $B = S^2$ なる対称行列 S を求めよ。

(3) $S^{-1}A$ は直行行列であることを示せ。