2006/12/08 電磁気III・中間テスト

1. 図 30-1 のような導線に電流 i が流れている。(a) 導線の直線部が，(b) 円弧部が，(c) 全体が半円の中心 C につくる磁場を求めなさい

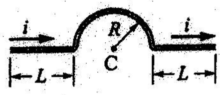


図 30-1

2. 図 30-8 のような，半径 a の長い円筒状の導体に，半径 b の長い円筒状の穴が空いている。円筒導体の軸と円筒空洞の軸は平行で距離 d だけ離れている。導体の断面に一様に電流 i が流れている。(a) 重ね合わせの原理を用いて，空洞の中心での磁場の大きさが次式で与えられることを示しなさい。

$$B=\frac{\mu_0 i d}{2\pi(a^2-b^2)}$$

(b) $b=0$ および $d=0$ という特別な場合についてどうなるか説明しなさい。(c) 空洞内の磁場が一様であることを示しなさい。ヒント：円筒空洞を，同じ断面をもつ円筒導体に互いに逆向きに流れる電流の重ね合わせとみなす。

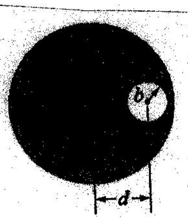


図 30-8

3. 30-15a は，内径 $a=2.0\,\mathrm{cm}$，外径 $b=4.0\,\mathrm{cm}$ の長い導円筒の断面を示している。円筒には紙面から出る向き流が流れており，電流密度は $J=cr^2$ ($c=3.0\times$ $\mathrm{A/m^4}$) である (r はメートル単位で表す)。円筒の中から 3.0 cm の位置での磁場 $\vec{B}$ の大きさはいくらか。

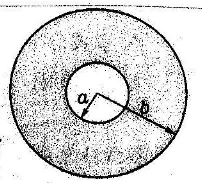
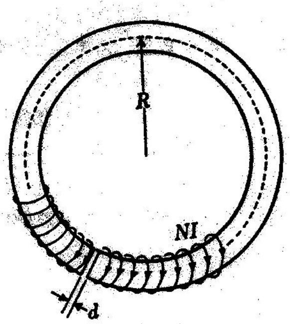


図30-15
(a)

4. 第 8.11 図に示すような大半径が R の円環状コイルがある。この中に幅 $d(d\ll R)$ のギャップを有する鉄心を入れた場合，ギャップ内の磁界は鉄心のない場合に比し何倍大きくなっているか（コイル内の磁界は一様であるとみなしてよい)。

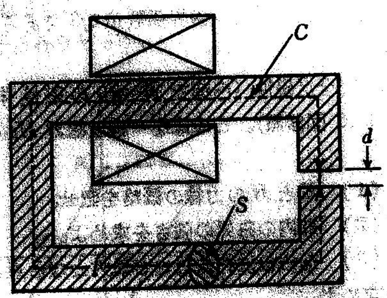


第 8.11 図

5. 第 8.14 図のような長さ l，断面積 S を有し，比透磁率 μ_s なる鉄心と，間隔 d のギャップよりなる磁気回路に，コイルが N 回巻かれ，それに電流 I が流れている。ギャップ内の磁界 H を

(1) B, H に対しての基礎方程式を用いて求めよ。

(2) 磁気抵抗を用いて回路論的に求めよ。



第 8.14 図

電磁気Ⅲ 中間テスト解答 (2006/10/08)

1

(a) ビオ・サバールの法則により，直線電流がその延長線上につくる磁場はゼロ。

(b) 半径 R，中心角 ϕ の円弧電流が円の中心につくる磁場の大きさは $B=\mu_0 i\phi/4\pi R$。ここではラジアン単位で $\phi=\pi$。したがって $B=\mu_0 i/4R$。向きは紙面に入る向き。

(c) (a)と(b)の和になるから，大きさは $B=\mu_0 i/4R$，向きは紙面に入る向き。

2

(a) 円筒空洞の空いた円筒導体に流れる電流を，同じ電流密度で空洞のない半径 a の円筒導体と，同じ電流密度で逆向きに電流が流れる半径 b の円筒導体の重ね合わせと考える。このとき空洞部分に流れる電流はゼロになる。断面積 A に一様に電流が流れる円筒導体内部の磁場の大きさは，導体の半径を R，中心軸からの距離を r とすると，教科書の式(30-22)より $B=\mu_0 ir/2\pi R^2$。半径 b の円筒導体に流れる電流が，この円筒の中心軸上につくる磁場 B_b は $r=0$ だからゼロ。半径 a の導体に流れる電流の電流密度は，

$$J=\frac{i}{A}=\frac{i}{\pi(a^2-b^2)}$$

したがって，電流は，

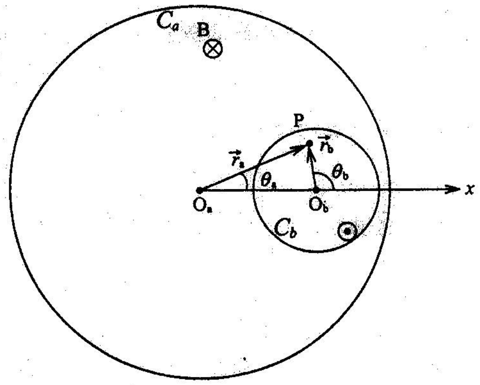
$$i_a=\pi a^2 J=\frac{ia^2}{a^2-b^2}$$

これが空洞の中心につくる磁場 B_a は，$R=a$，$r=d$ を代入して，

$$B=B_a=\frac{\mu_0 id}{2\pi(a^2-b^2)}$$

(b) $b=0$ のとき $B=\mu_0 id/2\pi a^2$。これは空洞がないときの式と同じである。$d=0$ のとき $B=0$。一様な電流密度で電流が流れる円筒導体殻の中心軸上の磁場はゼロである。

(c) 半径 a の円筒を C_a，その中心を O_a，半径 b の円筒を C_b，その中心を O_b をして，O_a と O_b を結ぶ線を x 軸(右向きが正)とする。また C_a には紙面に入る向き，C_b には紙面から出る向きに電流が流れるとする。空洞内の任意の点Pは，$\overrightarrow{O_aP}=\vec{r}_a=(r_a,\theta_a)$ または $\overrightarrow{O_bP}=\vec{r}_b=(r_b,\theta_b)$ で表される。電流密度を $J=i/A$ とすると，C_a が点Pにつくる磁場の大きさは



$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi a^2}r_a=\frac{\mu_0 J}{2}r_a$$

向きは時計回りだから $\theta_a-90°$。C_b が点Pにつくる磁場の大きさは

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi b^2}r_b=\frac{\mu_0 J}{2}r_b$$

向きは反時計回りだから $\theta_b+90°$。2つの円筒が点Pにつくる磁場の x 成分は，

$$B_x=\frac{\mu_0 J}{2}r_a\cos(\theta_a-90°)+\frac{\mu_0 J}{2}r_b\cos(\theta_b+90°)$$
$$=\frac{\mu_0 J}{2}[r_a\sin\theta_a-r_b\sin\theta_b]=0$$

y 成分は，

$$B_y=\frac{\mu_0 J}{2}r_a\sin(\theta_a-90°)+\frac{\mu_0 J}{2}r_b\sin(\theta_b+90°)$$
$$=\frac{\mu_0 J}{2}[-r_a\cos\theta_a+r_b\cos\theta_b]=-\frac{\mu_0 J}{2}d$$

すなわち，磁場は下向きで，大きさは一定。

3

解法： 磁場を求めたい位置は，導体円筒の内側で，内径と外径の間である。電流密度は円筒対称である（同じ半径の位置では同じ値をとる）。**Key Idea**：対称性があるのでアンペールの法則を使うことができる。半径 $r=3.0$cm での $\vec{B}$ を求めたいのだから，図30-15bのように，円筒と同心状にアンペール・ループを描く。

次に，ループに囲まれた電流 i_{enc} を計算する。**Key Idea**：電流は一様に分布しているわけではないので，式(30-21)のような比例関係を使うことはできない。その代わり，例題27-2bのように，電流密度を円筒の内径 a からループの半径 r まで積分する；

$$i_{enc}=\int j\,dA=\int_a^r cr^2\,(2\pi r\,dr)$$
$$=2\pi c\int_a^r r^3\,dr=2\pi c\left[\frac{r^4}{4}\right]_a^r$$
$$=\frac{\pi c\,(r^4-a^4)}{2}$$

積分の向きは任意に選べるが，とりあえず，時計まわりとする（図30-15b）。このループにアンペールの法則を適用すると，電流の向きは紙面から出る向きなのに，親指は向こうを向いてしまう；したがって，電流はマイナスである。

次に，アンペールの法則の左辺を計算しよう。図30-14でやったのと同じようにすると，式(30-20)が得られる。すなわち，

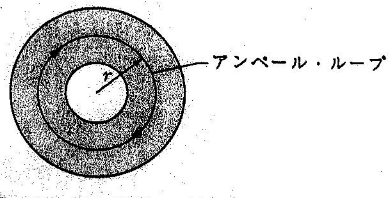


図30-15 例題30-3。(a)内径 a，外径 b の導電円筒の断面。(b)中心軸からの距離 r での磁場を計算したいので，半径 r のアンペール・ループを描き足した。

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0 i_{enc}$$

これより，

$$B(2\pi r)=-\frac{\mu_0\pi c}{2}\,(r^4-a^4)$$

B について解いて，値を代入すると，

$$B=-\frac{\mu_0 c}{4r}\,(r^4-a^4)$$
$$=-\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})\,(3.0\times10^6\,\mathrm{A/m^4})}{4\,(0.030\,\mathrm{m})}$$
$$\times[(0.030\,\mathrm{m})^4-(0.020\,\mathrm{m})^4]$$
$$=-2.0\times10^{-5}\,\mathrm{T}$$

中心軸から3.0cmの位置での磁場 $\vec{B}$ の大きさは，

$$B=2.0\times10^{-5}\,\mathrm{T}$$ （答）

磁力線の向きは積分の向きと逆になるので，図30-15bでは反時計まわりとなる。

4.

【解】 円環コイルの起磁力を NI，鉄心の比透磁率を μ_s，磁束密度を B とすれば，式(8.8)より

$$\left(\frac{B}{\mu_s\mu_0}\right)2\pi R+\frac{B}{\mu_0}d=NI \qquad \therefore\ B=\frac{\mu_s\mu_0}{2\pi R+d\mu_s}NI$$

一方，鉄心のないときの磁束密度 B_0 は

$$\frac{B_0}{\mu_0}2\pi R=NI \quad \text{から} \quad B_0=\frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

ゆえに

$$\frac{B}{B_0}=\frac{2\pi R\mu_s}{2\pi R+d\mu_s}$$

特に $\mu_s\gg\frac{2\pi R}{\mathrm{d}}$ なら $\frac{B}{B_0}=\frac{2\pi R}{d}$

5

【解】 (1) 鉄心内の B と H を B_i，H_i，ギャップ内の B と H を B_g，H_g とすれば式(8.25)を用いて

(a) 磁束の保存則より $B_iS=B_gS$

(b) アンペアの積分定理より $H_il+H_gd=NI$

(c) B-H の関係より $B_i=\mu_s\mu_0H_i,\quad B_g=\mu_0H_g$

$$\therefore\ H_i=\frac{B_i}{\mu_s\mu_0}=\frac{B_g}{\mu_s\mu_0}=\frac{H_g}{\mu_s}$$

$$\therefore\ H_g=\frac{\mu_sNI}{l+\mu_sd}=\frac{NI}{(l/\mu_s)+d}$$

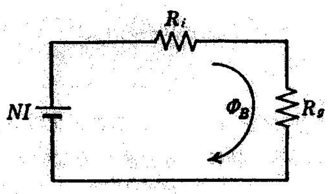
(2) 鉄磁路の磁気抵抗 R_i，ギャップの磁気抵抗 R_g はそれぞれ式(8.28)より

$$R_i=\frac{l}{\mu_s\mu_0S} \qquad R_g=\frac{d}{\mu_0S}$$

等価回路は第 8.15 図のようになり，NI，R_i，R_g は直列につながる。

$$\therefore\ \Phi_B=\frac{NI}{R_i+R_g}=\frac{\mu_s\mu_0NIS}{l+\mu_sd}$$

$$\therefore\ H_g=\frac{\Phi_B}{\mu_0S}=\frac{NI}{(l/\mu_s)+d}$$



第 8.15 図