問題 1　壺の中に、赤玉が a 個、白玉 b 個、黒球が c 個入っているとする。

$$\alpha = \frac{a}{a+b+c}, \quad \gamma = \frac{c}{a+b+c} \tag{1}$$

とおく。壺から一つ球を無作為に取り出す。赤玉を取り出せば 1 点、白玉なら、-1 点、黒球なら 0 点とする。この試行 X の、期待値（平均）M と特性関数 $\varphi_X(x)$ を α と γ であらわせ。

解答例　定義から、

$$P(X=1)=\alpha, \quad P(X=0)=\gamma, \quad P(X=-1)=\frac{b}{a+b+c}=1-\alpha-\gamma.$$

故に、

$$\begin{aligned} M &= 1\cdot\alpha + 0\cdot\gamma + (-1)\cdot(1-\alpha-\gamma) \\ &= 2\alpha+\gamma-1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_X(x) &= \alpha e^{\sqrt{-1}x} + (1-\alpha-\gamma)e^{-\sqrt{1}x} + \gamma e^{0\cdot\sqrt{-1}x} \\ &= \alpha e^{\sqrt{-1}x} + (1-\alpha-\gamma)e^{-\sqrt{1}x} + \gamma \end{aligned}$$

問題 2　確率変数 X が、離散型分布 $Po(3)$ に従うとき，平均 $E[X]$，分散 $\mathrm{Var}(X)$，特性関数 $\varphi_X(t)$, φ'_X を求めよ． 尚、それぞれの値は一般形に代入するのではなく，講義中に紹介した計算方法を各自繰り返すことにより求めよ．

解答例　$P(X=k)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}$.

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{3^k}{k!}e^{-3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{(k-1)!}e^{-3} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{3^{j+1}}{j!}e^{-3} = 3e^3e^{-3} = 3, \\ E[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{3^k}{k!}e^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{3^k}{k!}e^{-3} + \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{3^k}{k!}e^{-3} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^k}{(k-2)!}e^{-3} + 3 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{3^{j+2}}{j!}e^{-3} + 3 = 3^2e^3e^{-3}+3 = 12, \\ \mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = 12-9 = 3, \\ \varphi_X(t) &= \sum_{k=0} e^{ikt}\frac{3^k}{k!}e^{-3} = \sum_{k=0}\frac{\left(3e^{it}\right)^k}{k!}e^{-3} = \exp\left(3e^{it}\right)e^{-3} = \exp\left(3(e^{it}-1)\right), \\ \varphi'_X(t) &= 3ie^{it}\exp\left(3(e^{it}-1)\right), \end{aligned}$$

問題 3　確率変数 X が、$\Gamma(2,3)$ に従うとき，平均 $E[X]$，分散 $\mathrm{Var}(X)$，特性関数 $\varphi_X(t)$、φ'_X を求めよ．それぞれの値は一般形に代入するのではなく，講義中に紹介した計算方法を各自繰り返すことにより求めよ．

解答例　$X \sim \Gamma(2,3)$ のとき、定義から、密度関数は、$f_X(x) = \frac{9x}{\Gamma(2)} e^{-3x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ となる。

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^\infty x \frac{9x}{\Gamma(2)} e^{-3x} dx = -\frac{3x^2}{\Gamma(2)} e^{-3x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{6x}{\Gamma(2)} e^{-3x} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{2y}{3\Gamma(2)} e^{-y} dy = \frac{2}{3\Gamma(2)} \int_0^\infty y e^{-y} dx = \frac{2}{3\Gamma(2)} \Gamma(2) = \frac{2}{3} \\
E[X^2] &= \int_0^\infty x^2 \frac{9x}{\Gamma(2)} e^{-3x} dx = -\frac{3x^3}{\Gamma(2)} e^{-3x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{9x^2}{\Gamma(2)} e^{-3x} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{y^2}{3\Gamma(2)} e^{-y} dy = -\frac{y^2}{3\Gamma(2)} e^{-y}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2y}{3\Gamma(2)} e^{-y} dy = \frac{2}{3} \\
\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9} \\
\varphi_X(t) &= \int_0^\infty e^{itx} \frac{9x}{\Gamma(2)} e^{-3x} dx = \int_0^\infty \frac{9x}{\Gamma(2)} e^{-(3-it)x} dx \\
&= \frac{9}{(3-it)^2 \Gamma(2)} \int_0^\infty y e^{-y} dy = \frac{9}{(3-it)^2} \quad (y = (3-it)x) \\
\varphi'_X(t) &= \frac{18i}{(3-it)^3}
\end{aligned}
$$

注意; $\varphi_X(t)$ を求める際に複素変数変換を利用しなくても今の場合は次のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_0^\infty e^{itx} \frac{9x}{\Gamma(2)} e^{-3x} dx = \int_0^\infty \frac{9x}{\Gamma(2)} e^{-(3-it)x} dx \\
&= -\frac{9x}{(3-it)\Gamma(2)} e^{-(3-it)x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{9}{(3-it)\Gamma(2)} e^{-(3-it)x} dx \\
&= -\frac{9}{(3-it)^2 \Gamma(2)} e^{-(3-it)x}\Big|_0^\infty = \frac{9}{(3-it)^2 \Gamma(2)}
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\Gamma(2) = \int_0^\infty y e^{-y} dy = -y e^{-y}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y} dy = 1
$$

であるから，結局

$$
\varphi_X(t) = \frac{9}{(3-it)^2}
$$

問題 6　(1) X を平均 a のポアソン分布に従う確率変数、Y を X と独立同分布な確率変数とする。$X+Y$ の分布を求めよ。

(2) $N(t)$ を生起率 a のポアソン過程とする。条件付き確率 $P(N(s)=p|N(t)=q)$ をもとめよ。ただし、$p \le q \in \mathbb{N}$, $s<t$ とする。

解答例　(1) 仮定より、$P(X=m)=e^{-a}a^m/m!$ である。

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{m=0}^{n} P(X=m,\ Y=n-m) \\
&= \sum_{m=0}^{n} P(X=m)P(Y=n-m) && (X \text{ と } Y \text{ が独立より }) \\
&= \sum_{m=0}^{n} e^{-a}\frac{a^m}{m!}e^{-a}\frac{a^{n-m}}{(n-m)!} && (X \text{ と } Y \text{ の分布の定義より }) \\
&= e^{-2a}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}a^m a^{n-m} \\
&= e^{-2a}\frac{1}{n!}(2a)^n && ((a+a)^n \text{ の２項展開より})
\end{aligned}$$

ゆえに平均 $2a$ のポアソン分布となる。

(2)

$$\begin{aligned}
P(N(s)=p|N(t)=q) &= \frac{P(N(s)=p, N(t)=q)}{P(N(t)=q)} \\
&= \frac{e^{-as}\frac{(as)^p}{p!}e^{-a(t-s)}\frac{(a(t-s))^{q-p}}{(q-p)!}}{e^{-at}\frac{(at)^q}{q!}} \\
&= \frac{q!}{p!(q-p)!}\frac{s^p(t-s)^{q-p}}{t^q} \\
&= \binom{q}{p}\left(\frac{s}{t}\right)^p\left(1-\frac{s}{t}\right)^{q-p}
\end{aligned}$$

問題 7　次を満たす $p_n(t)$, $n=0,1,\ldots$ を求めよ.

$$\begin{cases} p_n' = -4p_n + 4p_{n-1}, \quad n=0,1,\ldots,\ (p_{-1}=0), \\ p_n(0)=0\ (n\ge 1),\ p_0(0)=1. \end{cases}$$

解答例　$q_n(t)=p_n(t)e^{4t}$ とおく．仮定より $q_n(0)=0\ (n\ge 1)$，$q_0(0)=1$ であり，さらに

$$q_n' = p_n' e^{4t} + 4p_n e^{4t} = (-4p_n + 4p_{n-1})e^{4t} + 4p_n e^{4t} = 4p_{n-1}e^{4t} = 4q_{n-1}.$$

まず，$n=0$ の場合を考えると，

$$q_0' = 4q_{-1} = 0.$$

したがって

$$q_0(t) = 1, \quad \forall t \ge 0.$$

$n \geq 1$ に関しては

$$
\begin{aligned}
q_n(t) &= \int_0^t q_n'(s_1)ds_1 = 4\int_0^t q_{n-1}(s_1)ds_1 \\
&= 4\int_0^t \left(\int_0^{s_1} q_{n-1}'(s_2)ds_2\right)ds_1 = 4^2\int_0^t \left(\int_0^{s_1} q_{n-2}(s_2)ds_2\right)ds_1 \\
&\ \vdots \\
&= 4^n \int_0^t \left(\int_0^{s_1}\left(\cdots\left(\int_0^{s_{n-1}} q_0(s_n)ds_n\right)ds_{n-1}\cdots\right)ds_2\right)ds_1 \\
&= 4^n\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
p_n(t) = q_n(t)e^{-4t} = \frac{(4t)^n}{n!}e^{-4t}, \quad n \geq 1.
$$

問題 8　5 匹の生物がそれぞれ無関係に出生率 $\log 2$ で増殖する．$N(t)$ を時刻 t における生物の総数とする．

(1) $N(t)$ はどのようなパラメータをもつ BD 過程といえるか．

(2) $p_n(t) = P(N(t) = n)$ の満たす常微分方程式系を求めよ．

(3) $p_n(t)$ を求めよ．

(4) $E[N(t)]$，$\mathrm{Var}(N(t))$ を求めよ．

解答例　(1) $\lambda_0 = \cdots = \lambda_4 = 0$，$\lambda_n = n\log 2$ $(n \geq 5)$，$\mu_n = 0$ とする．$N(t)$ は $\{\lambda_n, \mu_n\}$ をパラメータとする BD 過程である．

(2)

$$
\begin{aligned}
p_n(t+h) &= P(N(t+h) - N(t) = 0,\, N(t) = n) \\
&\quad + P(N(t+h) - N(t) = 1,\, N(t) = n-1) \\
&\quad + P(N(t+h) - N(t) = -1,\, N(t) = n+1) \\
&\quad + P(|N(t+h) - N(t)| \geq 2,\, N(t+h) = n) \\
&= P(N(t+h) - N(t) = 0 | N(t) = n)p_n(t) \\
&\quad + P(N(t+h) - N(t) = 1 | N(t) = n-1)p_{n-1}(t) \\
&\quad + P(N(t+h) - N(t) = -1 | N(t) = n+1)p_{n+1}(t) \\
&\quad + P(|N(t+h) - N(t)| \geq 2,\, N(t+h) = n) \\
&= \{1 - \lambda_n h - \mu_n h + o(h)\}p_n(t) + \{\lambda_{n-1}h + o(h)\}p_{n-1}(t) \\
&\quad + \{\mu_{n+1}h + o(h)\}p_{n+1}(t) + o(h) \\
&= \{1 - \lambda_n h - \mu_n h\}p_n(t) + \lambda_{n-1}hp_{n-1}(t) + \mu_{n+1}hp_{n+1}(t) + o(h)
\end{aligned}
$$

これより

$$
p_n' = -(\lambda_n + \mu_n)p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}, \quad n \geq 0.
$$

今の場合は

$$\begin{cases} p_n' = 0, & n = 0, \dots, 4, \\ p_5' = -5(\log 2)p_N, & \\ p_n' = -n(\log 2)p_n + (n-1)(\log 2)p_{n-1}, & n \geq 6, \\ p_5(0) = 1,\ p_n(0) = 0,\ n \neq 5. & \end{cases}$$

(3) $p_0(t) = \cdots = p_4(t) = 0$, $p_n(t) = \dfrac{(n-1)!}{24(n-5)!}(2^t - 1)^{n-5}2^{-nt}$ $(n \geq 5)$.

(4) $g(t) = E[N(t)]$, $y(t) = E[N(t)^2]$ とおく.

$$\begin{aligned} g' &= \sum_{n \geq 5} np_n' = -\log 2 \sum_{n \geq 5} n\{np_n - (n-1)p_{n-1}\} \\ &= -\log 2 \sum_{n \geq 5} n^2 p_n + \log 2 \sum_{n \geq 5}(n-1)^2 p_{n-1} + \log 2 \sum_{n \geq 5}(n-1)p_{n-1} = (\log 2)g \end{aligned}$$

$g(0) = 5$ ゆえ, $g(t) = 5e^{t \log 2} = 5 \cdot 2^t$. よって $E[N(t)] = 5 \cdot 2^t$.

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n \geq 5} n^2 p_n' = -\log 2 \sum_{n \geq 5} n^2\{np_n - (n-1)p_{n-1}\} \\ &= -\log 2 \sum_{n \geq 5} n^3 p_n + \log 2 \sum_{n \geq 5}(n-1)^3 p_{n-1} \\ &\qquad + 2\log 2 \sum_{n \geq 5}(n-1)^2 p_{n-1} + \log 2 \sum_{n \geq 5}(n-1)p_{n-1} \\ &= 2(\log 2)y + (\log 2)g = 2(\log 2)y + (\log 2)5 \cdot 2^t.. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} (ye^{-2(\log 2)t})' &= (\log 2)5 \cdot 2^t e^{-2(\log 2)t} = 5\log 2 e^{-(\log 2)t} \\ ye^{-2(\log 2)t} &= 25 + 5\{1 - e^{-(\log 2)t}\} = 30 - 5 \cdot 2^{-t}. \end{aligned}$$

ゆえに $E[N(t)^2] = y(t) = 30 \cdot 4^t - 5 \cdot 2^t$. したがって

$$\mathrm{Var}(N(t)) = 30 \cdot 4^t - 5 \cdot 2^t - 25 \cdot 4^t = 5(4^t - 2^t).$$

問題 9　サービス窓口がただ一つの銀行を考える. 時刻 t における店内の客の数を $N(t)$ とし, $p_n(t) = P(N(t) = n)$, $q_n = \lim_{t \to \infty} p_n(t)$ とおく. 客は平均 4 分おきに来店し, サービスは平均 2 分で終了するという.

(1) $p_n(t), p_{n+1}(t), p_{n-1}(t)$ の間の関係式を求めよ.

(2) q_n, q_{n+1}, q_{n-1} の満たす関係式と q_n を求めよ.

(3) 直ぐにサービスを受けられる確率を求めよ.

(4) 待ち行列の長さの期待値を求めよ.

(5) 店内にいる客の数の期待値を求めよ.

(6) 来店してからサービスを受けて店を出るまでの平均時間を求めよ.

解答例

(1) 客は単位時間あたり 1/4 人来て，サービスは単位時間あたり 1/2 人終了するから，

$$\begin{cases} p_0' = -\dfrac{1}{4}p_0 + \dfrac{1}{2}p_1, \\ p_n' = -\dfrac{3}{4}p_n + \dfrac{1}{4}p_{n-1} + \dfrac{1}{2}p_{n+1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

(2) (1) より

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{4}q_0 + \dfrac{1}{2}q_1, \\ 0 = -\dfrac{3}{4}q_n + \dfrac{1}{4}q_{n-1} + \dfrac{1}{2}q_{n+1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

したがって

$$\frac{1}{2}q_{n+1} - \frac{1}{4}q_n = \frac{1}{2}q_n - \frac{1}{4}q_{n-1} = \cdots = \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{4}q_0 = 0.$$

よって

$$q_n = 2^{-n}q_0.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1$ に代入すれば

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}q_0 = 2q_0. \quad \therefore q_0 = \frac{1}{2}, \ q_n = 2^{-n-1}.$$

(3) 求める確率は $q_0 = \frac{1}{2}$.

(4)

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)q_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)2^{-n-1} \\ &= 2^{-3}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} = 2^{-3}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} C_q &= \sum_{n=0}^{\infty} nq_n = \sum_{n=0}^{\infty} n2^{-n-1} \\ &= 2^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{-2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 \end{aligned}$$

(6) $W_q = 2(1+1) = 4$.