数学IA

問題 1. つぎの微分方程式の一般解を求めなさい。

$$y' = (x - y + 2)^2.$$

問題 2. つぎの微分方程式の一般解を求めなさい。

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

問題 3. 次の関数のラプラス逆変換を求めなさい。

$$\frac{s}{(s+3)^2}.$$

問題 4. 次の微分方程式の初期値問題を解きなさい。

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = te^t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

問題 5. つぎの微分方程式の一般解を求めなさい。

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^t.$$

問題 6. $f(x)$、$g(x)$ が同次線形微分方程式 $\phi(D)y = 0$ の解であれば、任意の実数 a,b に対して、$af(x) + bg(x)$ も解であることを示しなさい。

● Table 1.1 ラプラス変換表

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	t^p	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin at$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$H_\lambda(t)$	$\dfrac{e^{-\lambda s}}{s}$	$\delta(t)$	1

● Table 1.2 基本法則

線形法則	$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1\mathcal{L}[f_1] + c_2\mathcal{L}[f_2]$
第一移動法則	$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$
第二移動法則	$\mathcal{L}[H_\lambda(t)f(t-\lambda)] = e^{-\lambda s}\mathcal{L}[f(t)]$
微分法則	$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$
n 回微分法則	$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-1)-k} f^{(k)}(0)$
積分法則	$\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \dfrac{\mathcal{L}[f(t)]}{s}$
合成法則	$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$

● Table 1.3 基本法則の系

線形法則	$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F_1] + c_2\mathcal{L}^{-1}[F_2]$
第一移動法則	$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$
第二移動法則	$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\lambda s}F(s)] = H_\lambda(t)f(t-\lambda)$
微分法則	$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{ds}F(s)\right] = -t\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -tf(t)$
n 回微分法則	$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)\right] = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-1)^n t^n f(t)$
積分法則	$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\mathcal{L}[f(t)]}{s}\right] = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$
合成法則	$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]] = f(t) * g(t)$