平成１９年度　ディジタル信号処理　演習問題　（和田）

1.　アナログ信号 $x(t)$ をディジタル信号に変換するためには、変数 t と関数値 $x(t)$ の二つの量の (1) 化が必要である。変数 t を (1) 化することを (2) という。また関数値 $x(t)$ の (1) 化を量子化という。

$x(t)$ のフーリエ変換 $X(j\omega)$、すなわちスペクトルが $X(j\omega) = 0$ $(|\omega| > W)$ となるような信号 $x(t)$ は (3) 信号と呼ばれ、(2) 周期 T が $W \leq \pi/T$ であれば、この信号 $x(t)$ は周期 T ごとの値 $x(kT)$ によって、完全に復元できる。この事実を (2) 定理という。

フィルタの周波数特性 $H(j\omega)$ の絶対値 $|H(j\omega)|$ を振幅周波数特性と呼び、$|H(j\omega)| = 1$ となる周波数領域を (4) 域、$|H(j\omega)| = 0$ となる領域を (5) 域という。このような二者択一的な振幅特性を持つフィルタは、(4) 域、(5) 域の選び方によって理想 (6) フィルタ、理想 (7) フィルタ、理想 (8) フィルタ、理想 (9) フィルタの４種類に分類できる。実際には安定な線形時不変システムでフィルタを実現しなければならないから、安定な伝達関数の周波数特性で非因果的な理想特性を近似しなければならない。代表的な近似特性として、(10) 特性およびチェビシェフ特性がよく知られている。

(1) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(2) ＿＿＿＿＿＿＿＿

(3) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(4) ＿＿＿＿＿＿＿＿

(5) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(6) ＿＿＿＿＿＿＿＿

(7) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(8) ＿＿＿＿＿＿＿＿

(9) ＿＿＿＿＿＿＿＿　(10) ＿＿＿＿＿＿＿＿

2. W_N を $W_N = e^{-j2\pi/N}$ とおくとき、N＝４点の標本値列 $\{x(0),\ x(1),\ x(2),\ x(3)\}$ の DFT$\{X(0),\ X(1),\ X(2),\ X(3)\}$ は

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

で与えられる。DFT を時間間引き型の FFT アルゴリズムで求めるときは

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \mathcal{W}_4 \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(1) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

のように書き直される。この式の行列 $\mathcal{W}_4$ が

$$\mathcal{W}_4 = (\mathcal{W}_2 \otimes I_2) \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_2 \end{array}\right] (I_2 \otimes \mathcal{W}_2)$$

と表されることを示せ。ただし

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathcal{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} W_4^0 & 0 \\ 0 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix}$$

3. 次の括弧の中に適切な式を入れよ。

$x(t)$ のフーリエ変換を $X_a(\omega)$ とすると、サンプリング周期が T のとき

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_d(\omega) d\omega$$

を得る。ここで $X_d(\omega)$ は $X_a(\omega)$ を用いて

$$X_d(\omega) = (\qquad (4) \qquad)$$

と定義される量である。この $X_d(\omega)$ は ω に関して周期 $2\pi/T$ の周期関数であるので

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnT\omega}$$

とフーリエ級数に展開できる。フーリエ係数 C_n は

$$C_n = (\qquad (5) \qquad)$$

であり

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jnT\omega}$$

であることが分かる。一方、デルタ関数 $\delta(t)$ を用いて

$$d_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

と定義すると、この $d_T(t)$ は t に関して周期 T の周期関数であるので

$$d_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

のようにフーリエ級数に展開される。フーリエ係数 c_n は

$$c_n = (\qquad (6) \qquad)$$

であり

$$d_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

であることが分かる。よって $\widehat{x}(t) = x(t) d_T(t)$ のフーリエ変換 $\widehat{X}(\omega)$ は

$$\widehat{X}(\omega) = (\qquad (7) \qquad)$$

となり、$X_d(\omega)$ と $\widehat{X}(\omega)$ が等しいことが分かる。

なお、有限和 $d_T^N(t)$ を計算すると

$$d_T^N(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{jn\frac{2\pi}{T}t} = (\qquad (8) \qquad)$$

であり

$$b_T(t) = \begin{cases} 1 & -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

のフーリエ変換は

$$B_T(\omega) = (\qquad (9) \qquad)$$

である。